ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Cl. di Scienze — Vol. LXXVIII, Fasc. I — 1944-45.

LA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA DI DUE VARIABILI NELL'INTORNO DI UNA SINGOLARITÀ ORDINARIA DELLA SUA CURVA DI DIRAMAZIONE

Nota del dott. Carlo Felice Manara

ULRICO HOEPLI
Libraio dell' Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1944 - 45

LA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA DI DUE VARIABILI NELL'INTORNO DI UNA SINGOLARITÀ ORDINARIA DELLA SUA CURVA DI DIRAMAZIONE

Nota del dott. Carlo Felice Manara

(Presentata dal M. E. prof. Oscar Chisini il 19 gennaio 1945)

Sunto. — Si dimostra la possibilità e si assegna il modo di rappresentare analiticamente una funzione algebrica di due variabili indipendenti nell'intorno di un punto singolare ordinario della sua curva di diramazione.

§ 1. — Si consideri una superficie algebrica:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

e la funzione algebrica $z(x, y)$ da essa implicitamente definita. È noto che la curva di diramazione φ della $z(x, y)$ (luogo dei punti del piano xy per cui i valori della z non sono tutti funzionalmente distinti) è la traccia, sul piano xy stesso, del cilindro delle tangenti alla F parallele all'asse z.

La rappresentazione analitica della funzione $z(x, y)$ nell'intorno di un punto della curva φ è nota quando si tratti di un punto semplice oppure di un nodo di essa curva, nodo che sia traccia di una retta parallela all'asse z e bitangente alla F; il caso del nodo non presenta ulteriori difficoltà rispetto a quello di un punto regolare perchè esso può sempre venir considerato come la sovrapposizione accidentale di due rami regolari della curva φ. Essenzialmente diverso invece è il caso in cui la curva stessa presenti una cuspide che sia traccia di una tangente parallela all'asse z a contatto tripunto con la F; il problema di rappresentare analiticamente una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di una cuspide della sua curva di diramazione è stato risolto dal Chisini ([1]). Nel presente lavoro ci proponiamo di risolvere un problema più generale e precisamente quello di determinare la rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di un punto singolare ordinario, origine di un ramo superlineare di ordine $n > 2$ e di classe 1 della sua curva di diramazione φ. Rimandiamo ad altra occasione la determinazione della rappresentazione analitica della funzione stessa nell'intorno dei punti singolari di un tipo ancor più generale della curva φ, come pure l'esame dei casi di singolarità che siano possibili, come singolarità effettive, per la curva di diramazione di una funzione algebrica.

Come è noto un ramo superlineare del tipo che qui consideriamo quando si assuma la sua origine, che chiameremo O, come origine delle coordinate nel piano $x\,y$ e la sua tangente come asse delle x, è rappresentato da uno sviluppo in serie di Puiseux del tipo:

$$y = a_1 x^{1+1/n} + a_2 x^{1+2/n} + a_3 x^{1+3/n} + \dots \quad \text{con} \quad a_1 \neq 0. \tag{2}$$

Per concisione di esposizione, e quando non sarà a scapito della chiarezza, chiameremo P il punto generico del piano $x\,y$ e diremo brevemente che la z è funzione di P, scrivendo $z(\mathrm{P})$ invece di $z(x, y)$, ed in particolare $z(\mathrm{O})$ invece di $z(0, 0)$. Similmente, se le determinazioni di $z(\mathrm{P})$ che sono diramate, nell'intorno di O, dal ramo (2) della curva φ sono in numero di $n+1$ e costituiscono, nell'intorno stesso, un'unica funzione analitica ad $n+1$ rami diremo brevemente che la funzione $z(\mathrm{P})$ possiede in O una falda superlineare d'ordine $n+1$.

Nel seguito noi supporremo sempre che la z che stiamo studiando presenti in O una falda superlineare d'ordine $n+1$, giacchè il supporre verificata questa ipotesi, che del resto è naturale estensione di quella che vale nel caso di $n = 2$, è necessario per la validità di tutta la trattazione seguente.

Osserviamo qui che il supporre verificata questa nostra ipotesi equivale a supporre che il punto O sia una singolarità effettiva della curva φ come curva di diramazione di una funzione algebrica, escludendo quindi i casi di nessun interesse per noi, come potrebbe essere per es. quello di una funzione algebrica

([1]) Cfr. O. CHISINI, *Sulla rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di un punto cuspidale della curva di diramazione*. Rend. Ist. Lomb. Vol. 73, 1939-40.

definita da un' equazione :

$$z^2 - \varphi(x, y) = 0 \ (^2).$$

È chiaro d'altra parte che la nostra ipotesi è verificata quando il punto O sia traccia di una tangente a contatto $(n+1)$-punto con la superficie F, essendo il punto di contatto un punto semplice iperbolico della F stessa. In seguito [§ 5] dimostreremo che questo è l'unico caso in cui la nostra ipotesi è verificata e che, d'altra parte, l'ipotesi stessa può essere sostituita da un'altra assai meno restrittiva, senza che la nostra trattazione perda la sua validità.

§ 2. — Ci interessa ora esaminare il comportamento di quelle $n+1$ determinazioni di $z(\mathrm{P})$ che nell'intorno di O sono i rami di un'unica funzione analitica ad $n+1$ rami. A tal fine fissiamo un valore $\bar{x}$ prossimo al valore $x=0$ nel piano π_x della variabile complessa x; allora la funzione $z(\bar{x}, y)$ è funzione algebrica della sola variabile y e per essa gli n valori di y dati dalla (2) per $x = \bar{x}$ sono punti di diramazione; dalla stessa rappresentazione (2) della curva φ nell'intorno di O si deduce che tali n valori di y sono prossimi al valore $y=0$ e stanno, sul piano π_y della variabile complessa y, negli intorni dei vertici di un n-gono regolare avente per centro il punto $y=0$, possedendo da essi distanze infinitesime di ordine superiore a quelle che hanno dal punto $y=0$ stesso [3]. Per fissare le idee indicheremo tali valori con $y_1\, y_2 \dots y_n$ chiamando y_1 il primo in basso, a destra della parte negativa dell'asse immaginario del piano π_y e proseguendo poi a numerare progressivamente nel senso delle rotazioni positive.

(Si veda l'annessa fig. 1 che illustra il caso particolare ma del resto caratteristico di $n=4$). Per semplicità supporremo di aver fissato $\bar{x}$ in modo che nessuno dei punti y_i cada sull'asse immaginario del piano π_y.

Stabiliamo ora nel piano π_y un sistema di cammini, assumendoli partenti dal punto $y=0$ punto che, se $\bar{x}$ non è zero, è

---

(2) Per semplicità abbiamo qui indicato con la lettera φ il primo membro della equazione della φ stessa, come del resto abbiamo già fatto in casi analoghi per la superficie F.

(3) Per convincersene basta confrontare gli n valori dati dalla (2) con quelli, pure in numero di n, dati dalla $y = a_1 x^{1+1/n}$.

certamente non singolare per la $z(\bar{x}, y)$. Fissiamo anzitutto n cappii $\gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_n$ che partono dal punto $y = 0$ e vanno a circondare rispettivamente i punti $y_1\, y_2 \dots y_n$ percorrendo i segmenti che li uniscono col punto $y = 0$ stesso. La $z(\bar{x}, y)$ avrà poi altri punti di diramazione in π_y, punti che saranno ovviamente abbastanza lontani da $y_1\, y_2 \dots y_n$ o quanto meno esterni al loro n-gono. Immagineremo di circondare tali ulteriori punti con un cammino γ partente pure dal punto $y = 0$ ed adagiantesi, nel suo tratto iniziale, sulla parte positiva dell'asse immaginario del piano π_y. (Si veda ancora la fig. 1).

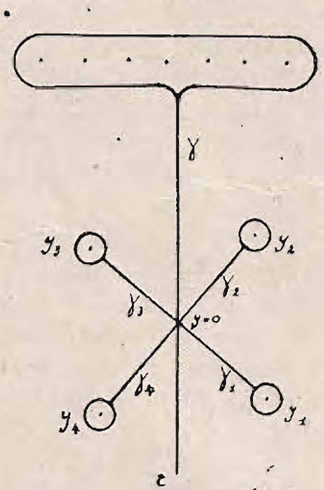

fig. 1

Occorre ora fissare senza ambiguità il nome delle determinazioni di $z(\bar{x}, y)$ nel punto $y = 0$ qualunque sia $\bar{x}$. A tale fine opereremo nel modo seguente: supporremo anzitutto che nel piano $x\,y$ il punto improprio dell'asse y sia regolare per $z(\mathrm{P})$ e quando così non fosse ci ridurremo a questo caso con una opportuna proiettività. Geometricamente questo equivale a supporre che la retta impropria del piano $y\,z$ sia in posizione generica rispetto alla superficie F, ossia che intersechi la superficie stessa, fuori del punto all'infinito dell'asse z, in punti tutti distinti ed in numero di m, se m (non minore di $n + 1$) è il numero delle determinazioni di $z(\mathrm{P})$. Fisseremo allora un nome per le determinazioni di $z(\mathrm{P})$ nel punto improprio dell'asse y, ossia daremo un nome alle intersezioni di F con la retta impropria del piano $y\,z$ fuori del punto Z_∞. Tale nome risulta allora fissato senza ambiguità qualunque sia il valore $\bar{x}$ di x perchè tale retta è appunto l'asse del fascio di piani $x = \bar{x}$.

Prolungheremo poi analiticamente le determinazioni di $z(\bar{x}, y)$ nel piano π_y dal punto $y = \infty$ al punto $y = 0$ lungo un cammino τ che si adagia sulla parte negativa dell'asse immaginario del piano π_y stesso (si veda ancora la fig. 1). Potremo anche qui supporre che τ non incontri punti singolari di $z(\bar{x}, y)$; in caso contrario sposteremo di poco il cammino τ facendogli subire una piccola rotazione attorno al punto $y = 0$. Allora durante il prolungamento tutte le determinazioni di $z(\bar{x}, y)$ si mantengono distinte e potremo così ottenere di fissare senza ambiguità il loro nome nel punto $y=0$. Supporremo di aver scelto i nomi in modo tale che le determinazioni che ci interessano si chiamino $z_0\, z_1 \dots z_n$.

Chiamiamo S_i $(i=1, 2, \dots n)$ lo scambio tra le determinazioni $z_0\, z_1 \dots z_n$ che si opera quando si percorre in senso positivo il cappio γ_i.

Facciamo ora percorrere ad $\overline{x}$ nel piano π_x un cammino chiuso λ abbracciante una sola volta in senso positivo il punto $x=0$ e abbastanza piccolo, sì da non contenere nel suo interno nessun valore di x che sia ascissa di un punto singolare della curva φ all' infuori di $x=0$. Dall' esame della (2) si trae che quando $\overline{x}$ è tornato alla posizione iniziale dopo aver percorso λ ognuno dei punti y_i ha percorso $(n+1)/n$ di giro in senso positivo attorno al punto $y=0$, a meno di infinitesimi di ordine superiore a quello della distanza che ognuno di essi ha dal punto $y=0$ stesso. Precisamente y_1 ha percorso un giro in senso positivo attorno al punto $y=0$ e poi si è portato nella posizione inizialmente occupata da y_2, questo ha percorso un giro in senso positivo attorno ad $y=0$ e poi si è portato nella posizione inizialmente occupata dal punto y_3 e così via. Si veda l' annessa fig. 2 che illustra la posizione finale dei punti y_i nel caso $n=4$. È chiaro che durante il moto i punti y_i mantengono inalterata la loro configurazione, sempre rimanendo, a meno di infinitesimi trascurabili, ai vertici di un n-gono regolare, di lato in generale variabile, avente centro nel punto $y=0$; la stessa considerazione vale per i cappii γ_i. Quindi nel passaggio dalla posizione iniziale a quella finale nessuno dei cappii γ_i viene tagliato da un punto di diramazione della $z(\overline{x}, y)$; per il modo come abbiamo scelto il cammino λ in π_x possiamo pure affermare che il cammino τ non viene tagliato da nessun punto di diramazione della $z(\overline{x}, y)$ che non sia un punto y_i. Per quanto riguarda questi ultimi possiamo osservare che, ovviamente, in un movimento continuo come quello che qui consideriamo ogni scambio S_i relativo al cappio γ_i di ugual indice rimane inalterato finchè nessuno

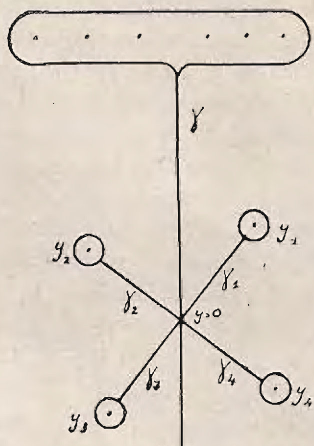

fig. 2

dei punti y_i taglia il cammino τ. Infatti noi ci siamo serviti di questo cammino per definire i nomi delle determinazioni di z nel punto $y = 0$ in cui hanno origine i cappii γ_i; se τ viene tagliato da un punto y_i i nomi delle determinazioni in $y = 0$ risultano cambiati, operandosi su di esse precisamente lo scambio S_i; in particolare quindi, dopo il taglio, ogni scambio S_k viene trasformato mediante lo scambio relativo al punto y_i che ha tagliato τ. Ora, per quanto abbiamo visto sopra esaminando il movimento dei punti y_i, al termine del movimento stesso il cammino τ è stato tagliato successivamente nello stesso senso (nel caso particolare caratteristico da noi illustrato nelle figg. 1 e 2 da sinistra a destra) $n + 1$ volte dai punti $y_n\, y_{n-1}\, y_{n-2} \dots y_1\, y_n$ nell'ordine scritto. Ora quando y_n taglia la prima volta il cammino τ tutti gli scambi (e quindi anche S_{n-1}) vengono trasformati mediante S_n; quando y_{n-1} taglia τ dopo y_n tutti gli scambii vengono trasformati mediante lo scambio relativo al cappio γ_{n-1}, scambio che non è più S_{n-1} ma, per il fatto che γ è già stato precedentemente tagliato da y_n, è $S_n \,.\, S_{n-1} \,.\, S_n$ (4) e così via.

In conclusione, posto:

$$T = S_n \,.\, S_1 \,.\, S_2 \dots S_{n-1}\, S_n \tag{3}$$

si trova che, tenendo conto di tutte le successive trasformazioni, alla fine al cappio γ_i compete lo scambio:

$$S'_i = T^{-1}\, S_i\, T. \tag{4}$$

§ 3. — Esaminiamo ora più davvicino il sistema di scambii S_i che operano sulle determinazioni $z_0\, z_1 \dots z_n$. A tal fine teniamo conto della condizione di invarianza dell'Enriques relativa ai piani multipli. In forza di essa gli scambii operati sulle determinazioni di $z(\overline{x}, y)$ dai cappii che circondano i punti di diramazione nel piano π_y dopo che il punto $\overline{x}$ ha percorso il cammino λ nel piano π_x devono coincidere con quelli che si avevano inizialmente. Ora, come abbiamo visto, dopo che $\overline{x}$ ha percorso λ noi veniamo a trovare y_1 al posto di y_2, y_2 al posto di y_3 ecc. ed infine y_n al posto di y_1 ed inoltre il cappio generico γ_i opera non più lo

(4) Si legga il prodotto delle operazioni da sinistra a destra e si tenga presente che, essendo gli S_i degli scambii, vale per ogni i la relazione $S_i^{-1} = S_i$.

scambio S_i ma lo scambio $S'_i = T^{-1} S_i T$. Per la condizione di invarianza dovrà quindi essere:

(5) $$S'_i = S_{i+1}; \qquad S'_n = S_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

ossia:

(6) $$S_{i+1} = T^{-1} S_i T.$$

Facendo in questa relazione successivamente $i = 1, 2, \ldots$ otteniamo:

$$S_2 = T^{-1} S_1 T; \qquad S_3 = T^{-1} S_2 T = T^{-2} S_1 T^2 \quad \text{ecc.}$$

e quindi in generale:

(6') $$S_{i+1} = T^{-i} S_1 T^i \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

per il particolare valore $i = n$ avremo poi:

(6'') $$S_1 = T^{-n} S_1 T^n.$$

Le relazioni (6') e (6'') che traducono la condizione di invarianza nel nostro caso, ci permettono di determinare la natura degli scambii S_i. A tal fine ricerchiamo più accuratamente quale possa essere la struttura della sostituzione T data dalla (3). Posto:

(7) $$H = S_1 . S_2 . \ldots . S_{n-1}$$

osserviamo che si ha:

(8) $$T = S_n . H . S_n$$

e quindi la T può considerarsi trasformata della H mediante lo scambio S_n. Basterà allora esaminare la struttura della H. Ora dalla ipotesi che z possegga in O una falda superlineare d'ordine $n+1$ si deduce immediatamente che gli scambi S_i devono formare un sistema transitivo di scambii sulle $n+1$ determinazioni $z_0\, z_1 \ldots z_n$, e di qui si deduce che essi sono tutti diversi e che il loro prodotto è una sostituzione ciclica precisamente di ordine $n+1$. Ora se tale deve essere la sostituzione:

$$S_1 . S_2 \ldots S_{n-1} . S_n = H . S_n$$

due ipotesi sono a priori possibili per la sostituzione H:

A) H è composta di due cicli operanti complessivamente su tutti gli elementi $0, 1, \ldots n$ [5] ed S_n è uno scambio che li

---

[5] Nello scrivere gli scambii e le sostituzioni indicheremo gli elementi $z_0\, z_1 \ldots z_n$ con i soli loro indici.

salda insieme, operando su due elementi che stanno ognuno in uno dei due cicli suddetti. Scegliendo opportunamente i nomi degli elementi avremo $H = (0\,1\,2 \dots (r-1))\,(r(r+1)\dots n)$; $S_n = (0\,r)$ ed infine per la (8):

$$T = (r\,1\,2 \dots (r-1))\,(0\,(r+1)\dots n) \qquad 1 < r < n. \tag{9}$$

B) H è composta di un solo ciclo operante su n elementi ed S_n opera su uno di essi e sul rimanente. Ancora scegliendo opportunamente il nome degli elementi avremo $H = (0\,1\,2 \dots (n-1))$; $S = (0\,n)$ ed infine per la (8):

$$T = (1\,2\,3 \dots n). \tag{10}$$

Dimostriamo che l'ipotesi *A*) nel nostro caso non può verificarsi. Infatti dalle (6') si deduce che tutti gli scambii S_i possono considerarsi trasformati di uno qualunque tra essi mediante le successive potenze di T, mentre dalla (6'') si deduce che la T stessa, come operazione trasformante, ha periodo n.

Consideriamo allora tutti gli scambii S_i come i trasformati di S_n mediante le successive potenze di T. Ora se vale l'ipotesi *A*) è $S_n = (0\,r)$ con $1 < r < n$ ed è:

$$T = (r\,1\,2 \dots (r-1))\,(0\,(r+1)\dots n).$$

Ma, per quanto abbiamo visto or ora, S_n deve essere mutato in sè dopo n trasformazioni; ora questo non può avvenire che se tornano singolarmente in sè, per T^n, i due elementi su cui opera. E per questo sarebbe necessario che ambedue i cicli di cui T si compone avessero un ordine di ciclicità che è un divisore di n. Ma dei due numeri r ed $n - r + 1$, che hanno per somma $n + 1$, uno almeno deve essere maggiore di $n/2$; ed allora essi non possono essere entrambi divisori di n che nei due soli casi:

$$r = 1, \qquad r = n.$$

I due casi sono sostanzialmente identici e ci riconducono all'ipotesi *B*); limitandoci per semplicità a considerare il caso $r = n$ abbiamo infatti $S_n = (0\,n)$; $T = (1\,2\,3 \dots n)(C)$ e quindi dalle (6') e (6''):

$$S_i = (0\,i).$$

Possiamo dunque enunciare in generale il risultato che dal seguito può apparire in certo modo come il fondamentale della presente ricerca, risultato contenuto nel seguente:

Lemma. - In relazione al modo tenuto per fissare i nomi delle determinazioni ed al sistema scelto di cappii γ_i gli scambii da essi operati possono essere sostanzialmente di un unico tipo, potendo ridursi, con scelta opportuna del nome delle determinazioni, alla forma:

$$S_i = (0\, i).$$

§ 4. — Da quanto precede si deduce il risultato finale che avevamo di mira, contenuto nel seguente:

Teorema I. - Una funzione algebrica di due variabili $z(x, y)$ che possegga una curva di diramazione φ con un punto singolare ordinario O e presenti in O una falda superlineare di ordine $n+1$, è rappresentabile analiticamente nell'intorno di O in serie di potenze intere di due parametri.

Conserveremo la nomenclatura dei precedenti paragrafi e riterremo ancora che φ sia rappresentata nell'intorno di O dallo sviluppo (2) che qui riscriviamo per comodità del lettore:

$$(2) \qquad y = a_1 x^{1+1/n} + a_2 x^{1+2/n} + a_3 y^{1+3/n} + \ldots \quad \text{con} \quad a_1 \neq 0.$$

Ciò posto la dimostrazione segue subito quando si tenga presente il risultato del Lemma con cui si chiude il precedente paragrafo; che cioè, fissato il sistema di cappii nel piano π, le sostituzioni tra le determinazioni $z_0\, z_1 \ldots z_n$ ad essi relative possono essere di un unico tipo. Se infatti esiste una seconda funzione algebrica $\zeta(x, y)$ che presenta in O una falda superlineare d'ordine $n+1$ e che ha una curva di diramazione ψ coincidente nell'intorno di O con φ, anch'essa avrà certe $n+1$ determinazioni $\zeta_0, \zeta_1 \ldots \zeta_n$ sulle quali il sistema di cappii γ_i opera un sistema di scambii Σ_i isomorfo a quello degli scambii S_i; con scelta opportuna dei nomi delle determinazioni ζ_i potremo far sì che ogni cappio γ_i scambii tra loro le determinazioni di z e di ζ che hanno lo stesso nome. Se ne deduce che, nell'intorno considerato di O, le determinazioni di z sono funzioni uniformi di quelle di ζ.

Ci si riduce quindi a costruire una funzione algebrica che abbia la sua curva di diramazione coincidente con φ e che si sappia rappresentare nell'intorno di O. A tal fine si potrebbe pensare di seguire un procedimento di questo tipo: ridurre anzitutto il ramo (2) ad un tipo semplice, per esempio alla forma:

$$(11) \qquad y^n = x^{n+1}$$

mediante una trasformazione puntuale regolare del piano $x\,y$; costruire poi, e sarebbe facile, una superficie razionale che abbia la (11) come curva di diramazione; senonchè, come ho dimostrato altrove [6], quando $n > 3$ è impossibile in generale ridurre il ramo (2) alla forma (11) con trasformazioni puntuali regolari. Conviene quindi seguire altra via; ci varremo allora di questo procedimento: chiamate per un momento $x_0\,y_0$ le coordinate di un punto di φ sia:

$$y - y_0 = \zeta(x - x_0) \tag{12}$$

l'equazione della tangente a φ stessa in $x_0\,y_0$. La ζ è una funzione algebrica delle due variabili $x\,y$ che ammette come curva di diramazione la φ e le sue eventuali tangenti di flesso [7]. Essa è manifestamente definita da una superficie Φ che è una rigata avente come piano direttore il piano $x\,y$.

Per ottenere la rappresentazione della falda di Φ che ci interessa, scriveremo anzitutto la (2) parametricamente così:

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + a_3 t^{n+3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{n+i}. \end{cases} \tag{2'}$$

Allora la (12) diventa:

$$y - \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{n+i} = \zeta(x - t^n) \tag{12'}$$

dove:

$$\zeta = \frac{y'}{x'} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n+i}{n} a_i t^i. \tag{13}$$

Posto $x = t^n = u$, la falda di Φ nell'intorno di O è allora rappresentata per $|t|$ ed $|u|$ opportunamente piccoli dalle espressioni:

---

(6) Nella nota dal titolo: *Invarianti per trasformazioni puntuali regolari dei rami superlineari ordinarii delle curve algebriche piane*. Rend. Ist. Lomb. Vol. 77, 1943-44.

(7) Cfr. O. CHISINI, *Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione*. Rend. Ist. Lomb. Vol. 77, 1943-44.

$$(14)\qquad \begin{cases} x = u + t^n \\ y = u \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{n+i}{n} a_i t^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{n+i} \\ \zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{n+i}{n} a_i t^i \end{cases}$$

Giunti a questo punto il teorema potrebbe sembrare dimostrato perchè saremmo portati a rappresentare la superficie F nell'intorno di O con le formule:

$$(15)\qquad \begin{cases} x = u + t^n \\ y = u \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{n+i}{n} a_i t_i + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{n+i} \\ z = f(\zeta) \end{cases}$$

dove f rappresenta una funzione uniforme del suo argomento con i coefficienti funzioni uniformi di x ed y, cioè in definitiva una funzione uniforme di t ed u. In effetto le (15) valgono e dànno la dimostrazione del nostro teorema, ma la deduzione non è perfetta se non si sono fatte prima alcune precisazioni: anzitutto occorre assicurare che la funzione ζ possiede in O una falda superlineare d'ordine $n+1$; in secondo luogo, poichè abbiamo detto che la ζ ammette come curva di diramazione la φ e le sue eventuali tangenti di flesso, occorre dimostrare che nell'intorno che ci interessa la curva di diramazione della ζ è data dalla sola φ, ossia che la tangente al ramo (2) in O non conta tra le tangenti di flesso della curva φ.

Sarebbe facile dimostrare direttamente i due fatti, ma essi diventano addirittura evidenti quando si trasforma il ramo (2) per dualità, ottenendo un ramo la cui origine è un punto semplice con la tangente a contatto $n+1$ punto.

Ogni dubbio che si possa sollevare rimane così risolto ed il nostro teorema completamente dimostrato.

§ 5. — Rimane ora a dimostrare quello che abbiamo annunciato alla fine del paragrafo 1, che cioè l'unico caso in cui la z possiede in O una falda superlineare d'ordine $n+1$ è quello in cui O sia traccia di una retta a contatto $(n+1)$-punto con la superficie F (retta che nel nostro caso è l'asse delle z), essendo il punto di contatto un punto semplice iperbolico della superficie e che, d'altra parte, alla ipotesi che z possegga in O una falda superlineare d'ordine $n+1$ se ne può sostituire un'altra meno restrittiva.

Quanto abbiamo enunciato è contenuto nel seguente:

Teorema II. - Se l'asse z ha $n+1$ intersezioni con la F riunite in un punto Q (diverso da Z_∞), allora Q è necessariamente un punto semplice iperbolico di F e l'asse z ha ivi un contatto $(n+1)$-punto con F stessa.

Basta evidentemente dimostrare che, nell'ipotesi posta, la curva C sezione della F con un piano α generico per l'asse delle z ha in Q un punto semplice ed un contatto $(n+1)$-punto con l'asse z stesso, mentre la curva K sezione di F con il piano coordinato xz ha in Q un punto doppio, uno dei rami di K avendo ivi contatto n-punto con l'asse z.

La dimostrazione si basa sulla teoria della singolarità delle curve algebriche piane definite come prodotto di sostituzioni ([8]). Per quanto riguarda la sezione di F con un piano α generico per l'asse z, chiamiamo r la intersezione di α stesso col piano xy, e consideriamo un piano α' molto vicino ad α e non passante per l'asse z, chiamando r' la retta intersezione di α' col piano xy e C' la curva intersezione con F; manifestamente su r ed r' la $z(P)$ è funzione algebrica di una sola variabile (funzione che per un momento chiameremo con $\bar{z}(P)$ e $\bar{z}'(P)$ a seconda che la consideriamo su r o r'), i cui punti di diramazione sono le intersezioni di r (rispettivamente di r') con la curva φ. Ora su r' esistono n punti di diramazione che, al tendere di r' ad r, tendono ad O. Poichè ad ogni punto di diramazione corrisponde uno scambio sulle determinazioni di $\bar{z}'(P)$, deduciamo che la singolarità di C in Q è generata dal confluire di n punti di diramazione semplici in O, ossia è definita da n scambii sui rami di $\bar{z}(P)$. Ma, per l'ipotesi del teorema che stiamo dimostrando, l'asse z ha con la C un'intersezione $(n+1)$-pla in Q, e questo non è possibile che se l'asse z è una tangente a contatto $(n+1)$-punto, ed il punto di contatto un punto semplice della curva. In-

([8]) Cfr. O. Chisini, *Le singolarità di un ramo superlineare di curva algebrica definite mediante un prodotto di sostituzioni*. Att. Ist. Veneto. Tomo 80, 1921; e *I punti singolari di una curva algebrica definiti mediante un prodotto di sostituzioni*. Rend. Ist. Lomb. Vol. 74, 1940-41.

fatti in ogni altro caso la singolarità di C sarebbe generata dal confluire di più di n scambi e quindi la singolarità della curva φ in O sarebbe un punto di molteplicità maggiore di n.

Perfettamente analoga è la dimostrazione per la sezione della F col piano coordinato $x\,z$.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato; di qui segue poi subito che, come abbiamo annunciato, il caso in cui l'asse z sia tangente a contatto $(n+1)$-punto con la F in un punto semplice iperbolico di F stessa è l'unico caso in cui la funzione z può possedere una falda superlineare d'ordine $n+1$, giacchè, se questo avviene, allora è verificata anche l'ipotesi, che appare meno restrittiva, del nostro teorema.

Estratto dai *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere
Vol. LXXVIII, 9° della Serie III, Fasc. I.

Pavia — Premiata Tipografia Successori Fusi — 1945

Premiata Tipografia Successori FUSI — Pavia, Via L. Spallanzani 11 - 1945